

The certainty principle

D. A. Arbatsky*

February 1, 2008

Abstract

The notion of the quantum angle is introduced. The quantum angle turns out to be a metric on the set of physical states of a quantum system. Its kinematics and dynamics is studied. The *certainty* principle for quantum systems is formulated and proved. It turns out that the certainty principle is closely connected with the Heisenberg uncertainty principle (it presents, in some sense, an opposite point of view). But at the same time the certainty principle allows to give rigorous formulations for wider class of problems (it allows to rigorously interpret and ground the analogous inequalities for the pairs of quantities like time - energy, angle - angular momentum etc.)

The quantum angle and the certainty principle

The notion of the quantum angle. As it is known, the set of states of any quantum system forms a complex Hilbert space. We will denote it \mathcal{H} .

Elements of the space \mathcal{H} we will denote as $a, b \dots \in \mathcal{H}$.

The scalar product in \mathcal{H} we will write as $\langle a|b \rangle$. It is linear with respect to the second argument and anti-linear with respect to the first one.

The norm of a vector a we will denote as $\|a\| = \langle a|a \rangle^{1/2}$.

Consider two non-zero vectors $a, b \in \mathcal{H}$. Let us define between them *the quantum angle* by the formula:

$$\angle(a, b) = \arccos \frac{|\langle a|b \rangle|}{\|a\| \|b\|}.$$

According to Cauchy-Bunyakovsky-Schwarz inequality, under the function \arccos we have the value that is not greater than unity. Therefore, the quantum angle is a real number:

$$\angle(a, b) \in \mathbb{R}, \quad 0 \leq \angle(a, b) \leq \frac{\pi}{2}.$$

For simplification of formulas we will later on always work with normalized vectors: $\|a\| = 1$, $\|b\| = 1$. In this case the formula for the angle is written simply as:

$$\angle(a, b) = \arccos |\langle a|b \rangle|.$$

Geometry of quantum angle. Let us consider the two extreme cases: $\angle(a, b) = 0$ and $\angle(a, b) = \pi/2$.

According to the Parseval equality, the first case takes place when the vectors differ only by phase factor:

$$\angle(a, b) = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad a \parallel b.$$

From physical point of view, we can say that the corresponding quantum states are *identical*.

The second case takes place when vectors are orthogonal:

$$\angle(a, b) = \frac{\pi}{2} \quad \Longleftrightarrow \quad a \perp b.$$

*<http://daarb.narod.ru/>, <http://wave.front.ru/>

In this case we can say that the corresponding quantum states are *completely different*.

Implying this physical terminology, which is used in the considered extreme cases, let us introduce also the following definition. Let us say that the states described by the vectors a and b *differ not-substantially*, if $\angle(a, b) < 1$; let us also say that the states *differ substantially*, if $\angle(a, b) \geq 1$.

T h e o r e m. *For any three vectors $a, b, c \in \mathcal{H}$ the inequality takes place (“the triangle inequality”):*

$$\angle(a, c) \leq \angle(a, b) + \angle(b, c) .$$

In order to prove this theorem, let us first notice that, so far as the inequality is proved for three vectors, we can bound ourself with the case when the Hilbert space \mathcal{H} is three dimensional: $\mathcal{H} = \mathbb{C}^3$.

Multiplying the vectors a , b , and c by appropriate factors and choosing orthonormal basis in \mathcal{H} appropriately, we can achieve that components of these vectors take the form:

$$a = (1 \ 0 \ 0) , \quad b = (b_1 \ z \ b_3) , \quad c = (c_1 \ c_2 \ 0) ,$$

where $c_1, c_2, b_1, b_3 \in [0; 1]$ are real non-negative numbers, and $z \in \mathbb{C}$ is complex.

Let us introduce also the auxiliary vector b' :

$$b' = (b_1 \ |z| \ b_3) .$$

We have:

$$\angle(b', c) = \arccos(b_1 c_1 + |z| c_2) \leq \arccos(b_1 c_1 + z c_2) = \angle(b, c) .$$

So far as the three vectors a , b' , and c have real coordinates and unit lengths, the triangle inequality for them is the well known triangle inequality on the sphere in the real three-dimensional Euclidean space:

$$\angle(a, c) \leq \angle(a, b') + \angle(b', c) .$$

Combining the obtained inequalities we get:

$$\angle(a, c) \leq \angle(a, b') + \angle(b', c) = \angle(a, b) + \angle(b', c) \leq \angle(a, b) + \angle(b, c) \quad \blacksquare$$

Summarizing what was said above, we can say that the quantum angle \angle , considered as a function on the set of pairs of physical quantum states (considered to phase factor), is a *metric*.

T h e o r e m. *The metric space of physical quantum states with the metric \angle is complete.*

The proof of this theorem is not difficult, but it requires substantial technical work. So we omit it here.

Kinematics of quantum angle. Let now the vector r depend on the real parameter t : $t \in \mathbb{R}$, $r(t) \in \mathcal{H}$, $\|r(t)\| = 1$.

Let us define *the quantum velocity* $v(t)$ by the formula:

$$v(t) = \dot{r}(t) = \lim_{\delta t \rightarrow 0} \frac{r(t + \delta t) - r(t)}{\delta t} .$$

Let us define also *the quantum angular speed* $\omega(t)$ by the formula:

$$\omega(t) = \lim_{\delta t \rightarrow 0} \frac{\angle(r(t + \delta t), r(t))}{|\delta t|} .$$

In order to express $\omega(t)$ through $v(t)$ let us decompose $v(t)$ into the two orthogonal components:

$$v_{\parallel}(t) = r(t) \langle r(t) | v(t) \rangle , \quad v_{\perp}(t) = v(t) - v_{\parallel}(t) .$$

T h e o r e m. *The quantum angular speed is equal to the norm of the orthogonal component of the quantum velocity:*

$$\omega(t) = \|v_{\perp}(t)\| .$$

In order to prove this theorem let us use the Parseval equality to change \arccos to \arcsin :

$$\begin{aligned}
\angle(r(t+\delta t), r(t)) &= \arccos |\langle r(t+\delta t) | r(t) \rangle| = \\
&= \arcsin \|r(t+\delta t) - r(t) \langle r(t) | r(t+\delta t) \rangle\| = \\
&= \arcsin \|r(t+\delta t) - r(t) - r(t) \langle r(t) | r(t+\delta t) - r(t) \rangle\| = \\
&= \arcsin \|v(t) \delta t + o(\delta t) - r(t) \langle r(t) | v(t) \delta t + o(\delta t) \rangle\| = \\
&= \arcsin \left\| (v(t) - r(t) \langle r(t) | v(t) \rangle) \delta t + o(\delta t) \right\| = \\
&= \arcsin \|v_{\perp}(t) \delta t + o(\delta t)\| = \arcsin (\|v_{\perp}(t)\| |\delta t| + o(\delta t)) = \\
&= \|v_{\perp}(t)\| |\delta t| + o(\delta t) \quad \blacksquare
\end{aligned}$$

Theorem. *The quantum angle satisfy the estimate:*

$$\angle(r(t_2), r(t_1)) \leq \left| \int_{t_1}^{t_2} \omega(t) dt \right|. \quad (1)$$

For the proof let us use the triangle inequality:

$$\left| \angle(r(t+\delta t), r(t_1)) - \angle(r(t), r(t_1)) \right| \leq \angle(r(t+\delta t), r(t)).$$

Dividing by $|\delta t|$ and taking the limit $\delta t \rightarrow 0$, we get:

$$\left| \frac{d}{dt} \angle(r(t), r(t_1)) \right| \leq \omega(t).$$

Performing integration from t_1 to t_2 , we get the desired inequality. \blacksquare

In fact, the estimate (1) is the best. Namely, there is the following

Theorem. *The quantum angle between two vectors r_1 and r_2 can be expressed by the formula:*

$$\angle(r_2, r_1) = \min \left| \int_{t_1}^{t_2} \omega(t) dt \right|,$$

where the minimum is taken among all curves $r(t)$ with ends in r_1 and r_2 : $r(t_1) = r_1$, $r(t_2) = r_2$.

For the proof of the theorem let us twist the phase of r_2 , $r_2 \rightarrow r'_2 = e^{i\alpha} r_2$, so that $\langle r'_2 | r_1 \rangle$ become real and $\langle r'_2 | r_1 \rangle \in [0, 1]$.

Let us consider the linear shell of r'_2 and r_1 , $\mathcal{L}(r'_2, r_1)$. There we can choose an orthonormal basis so that

$$r_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad r'_2 = \begin{pmatrix} a & b \end{pmatrix},$$

where $a, b \in [0, 1]$ are real non-negative numbers.

Considering then r'_2 and r_1 as real vectors on Euclidean plane we see that it is possible to stretch the circular arc between them where the estimation integral is exactly equal to the quantum angle. \blacksquare

Dynamics of quantum angle. Let us have now a strongly continuous one-parameter unitary group $U(\delta s) = e^{-i\delta s A/\hbar}$, where $A = A^*$ is a self-adjoint operator in the space of states \mathcal{H} (it is called the infinitesimal generator of $U(\delta s)$); $\delta s \in \mathbb{R}$ is the parameter of the group; $\hbar \in \mathbb{R}$ is the Planck's constant.

And suppose now that the dependence of state vector on the parameter δs is defined by the formula:

$$r(\delta s) = |\delta s\rangle = U(\delta s)|\rangle = e^{-i\delta s A/\hbar}|\rangle.$$

Here $|\delta s\rangle \in \mathcal{H}$ is another notation for the state vector connected with parameter equal to δs ; $|\rangle \in \mathcal{H}$ is a fixed ket-vector of state.

Let us suppose that the function $r(\delta s)$ is differentiable. Then the quantum velocity is expressed by the formula:

$$v(\delta s) = \frac{1}{i\hbar} A e^{-i\delta s A/\hbar}|\rangle = \frac{1}{i\hbar} A |\delta s\rangle.$$

The mean of the operator A does not depend on time:

$$\overline{A} = \langle \delta s | A | \delta s \rangle = \langle e^{+i\delta s A/\hbar} A e^{-i\delta s A/\hbar} \rangle = \langle A e^{+i\delta s A/\hbar} e^{-i\delta s A/\hbar} \rangle = \langle A \rangle .$$

Therefore the components of the quantum velocity can be written just as:

$$v_{\parallel}(\delta s) = |\delta s\rangle \langle \delta s | \frac{1}{i\hbar} A | \delta s \rangle = \frac{1}{i\hbar} \overline{A} | \delta s \rangle$$

$$v_{\perp}(\delta s) = \frac{1}{i\hbar} (A - \overline{A}) | \delta s \rangle .$$

The quantum angular speed turns out to be independent of time also:

$$\begin{aligned} \omega(\delta s) &= \|v_{\perp}(\delta s)\| = \frac{1}{\hbar} \langle \delta s | (A - \overline{A})^2 | \delta s \rangle^{1/2} = \frac{1}{\hbar} \langle e^{+i\delta s A/\hbar} (A - \overline{A})^2 e^{-i\delta s A/\hbar} \rangle^{1/2} = \\ &= \frac{1}{\hbar} \langle (A - \overline{A})^2 e^{+i\delta s A/\hbar} e^{-i\delta s A/\hbar} \rangle^{1/2} = \frac{1}{\hbar} \langle (A - \overline{A})^2 \rangle^{1/2} = \frac{1}{\hbar} \Delta_{\gamma} A . \end{aligned}$$

Here $\Delta_{\gamma} A$ is a short notation for the standard deviation of A in the state $|\delta s\rangle$.

Consider now how the quantum angle $\angle(|\delta s\rangle, |\delta s\rangle)$ behaves in this case. Using for it the estimate (1) we have:

$$\angle(|\delta s\rangle, |\delta s\rangle) \leq \left| \int_0^{\delta s} \omega(\sigma) d\sigma \right| = \frac{1}{\hbar} |\delta s| \Delta_{\gamma} A .$$

From this inequality we obtain the

Theorem. *So that under the action of strongly continuous one-parameter unitary group $U(\delta s) = e^{-i\delta s A/\hbar}$ the initial state vector $|\delta s\rangle$ changes substantially, it is necessary to satisfy the inequality:*

$$|\delta s| \Delta_{\gamma} A \geq \hbar$$

(2)

By the example of the Schrödinger particle we will see that this theorem turns out to be closely connected with the Heisenberg uncertainty principle, but has other meaning. Taking into account this connection, we can name this theorem *the certainty principle*.

The inequality expressing the certainty principle can be written also in the following way:

$$\Delta_{\gamma}(\delta s A) \geq \hbar$$

(3)

In this form it can be naturally carried over to the case when δs and A are matrices.

Examples

One-dimensional Schrödinger particle. Consider the one-dimensional Schrödinger particle with the coordinate defined by the variable x . Its state vector can be written by the wave function $\psi(x)$. In its space of states the group of shifts acts by the formula:

$$U(\delta x) \psi(x) = \psi(x - \delta x) .$$

This group can be written in the form:

$$U(\delta x) = e^{-i\delta x P/\hbar} , \quad P = -i\hbar \frac{d}{dx} .$$

Here P is the operator of momentum.

Applying the certainty principle in the form (2), we get:

$$|\delta x| \Delta_{\psi(x)} P \geq \hbar .$$

If we take as $\psi(x)$ a well localized packet of de Broglie waves, that turns into zero outside of some interval l , then from this inequality, in particular, we have that $l \geq \hbar/\Delta_{\psi(x)} P$: because when the packet is moved to the distance l , the change of the quantum angle must turn out to be greater than 1 (namely, $\pi/2$).

So, the Heisenberg uncertainty principle, if it is understood in qualitative sense, follows from the certainty principle. But if we understand the Heisenberg uncertainty principle in quantitative sense, according to the Pauli-Weyl inequality

$$\Delta_{\psi(x)} X \Delta_{\psi(x)} P \geq \frac{\hbar}{2} , \quad (4)$$

then there is no direct connection between these two principles.

Furthermore, from physical point of view, the Heisenberg uncertainty principle and the certainty principle are like two points of view on the spread of the wave packet. The Heisenberg uncertainty principle says, that the wave packet is spread, because the *classical* state of the particle is *badly defined*. On the other hand, the certainty principle states, that the wave packet is spread, because the *quantum* state is *well defined*.

To the three-dimensional case the certainty principle is easily generalized in the form (3):

$$\Delta_{\psi(x)} (\delta x_i P_i) \geq \hbar ,$$

where summation over i is implied.

Schrödinger particle on circle. Consider now a plane with Cartesian coordinates x and y . Let us have the circle $x^2 + y^2 = 1$ defined on the plane. On this circle as one-dimensional coordinate we can use the polar angle φ , considered to 2π .

The state vector of the Schrödinger particle on this circle can be written by the wave function $\psi(\varphi)$. And $\psi(\varphi + 2\pi) = \psi(\varphi)$.

In the space of states the action of the rotation group is naturally defined:

$$U(\delta\varphi) \psi(\varphi) = \psi(\varphi - \delta\varphi) .$$

This group can be written in the form:

$$U(\delta\varphi) = e^{-i\delta\varphi J/\hbar} , \quad J = -i\hbar \frac{d}{d\varphi} .$$

Here J is the operator of angular momentum.

Using the certainty principle does not arise any difficulties:

$$|\delta\varphi| \Delta_{\psi(\varphi)} J \geq \hbar .$$

As regards the uncertainty principle, a carrying over of the inequality (4) to this case is impossible¹.

In the three-dimensional case the certainty principle also easily gives:

$$\Delta_{\psi(x,y,z)} (\delta\varphi_i J_i) \geq \hbar .$$

A system with Hamiltonian independent of time. Let us have now a quantum system with a Hamiltonian H independent of time. On the space of states we have the following action of the group of time shifts:

$$U(\delta t) = e^{-i\delta t (-H)/\hbar} .$$

The certainty principle in this case immediately gives:

$$|\delta t| \Delta_\psi H \geq \hbar .$$

If we apply this formula, for example, to estimation of the life time of a quasi-stationary decaying state, then it states that its typical life time is not less than Planck's constant divided by the width of the corresponding energy level. And here all the terms can be defined with exact mathematical sense.

As regards to attempts to formulate the Heisenberg uncertainty principle for values time - energy, after Bohr has declared such a principle (in qualitative sense) so many researches and discussions were performed for clarification of its sense, that it is possible to write about them a separate review. As far as I know, a rigorous formulation of the uncertainty principle for this case have not been formulated till now².

¹About some attempts that were made to suggest an inequality like (4), see [1].

²See also the discussion of this question by J. Baez [2].

Relativistic systems. Consider now any relativistic quantum system. On its space of states the Poincare group acts. As an example of such a system any RCQ-quantized field can serve³ [3, 4]. And let us restrict ourself to the discussion of the case when the field turns out quantized in the usual Hilbert space.

In this case the application of the certainty principle does not meet any difficulties:

$$\Delta_j (-\delta x_\mu P_\mu + \frac{1}{2} \delta \omega_{\mu\nu} J_{\mu\nu}) \geq \hbar ,$$

where P_μ is the vector operator of energy-momentum, $J_{\mu\nu}$ is the tensor operator of four-dimensional angular momentum, δx_μ and $\delta \omega_{\nu\rho}$ are the standard logarithmic coordinates of the Poincare group.

As regards to the application of the Heisenberg uncertainty principle, it is unlikely to be possible. In the previous paragraph we have seen that for the values time - energy it arose great difficulties.

In this connection, even from the ideas relativistic invariance it is clear that even for coordinates and momenta the situation cannot be simple. And it turns out to be true, because it is known that all attempts to introduce the notion of coordinates (as self-adjoint operators on the space of states) for relativistic systems are quite artificial⁴.

References

- [1] A. S. Davydov „*Kvantovaya mekhanika*“, 2-nd ed., M.: Nauka (1973).
- [2] J. Baez “The time-energy uncertainty relation” (2000), <http://math.ucr.edu/home/baez/uncertainty.html> .
- [3] D. A. Arbatsky “On quantization of electromagnetic field” (2002),
<http://daarb.narod.ru/qed-eng.html> , <http://wave.front.ru/qed-eng.html> , arXiv:math-ph/0402003 .
[Rus.: D. A. Arbatsky „O kvantovanii elektromagnitnogo polya“ (2002),
<http://daarb.narod.ru/qed-rus.html> , <http://wave.front.ru/qed-rus.html> , arXiv:math-ph/0402003 .]
- [4] D. A. Arbatsky “What is “relativistic canonical quantization”?” (2005),
<http://daarb.narod.ru/wircq-eng.html> , <http://wave.front.ru/wircq-eng.html> , arXiv:math-ph/0503029 .
[Rus.: D. A. Arbatsky „Chto takoe „relyativistskoe kanonicheskoe kvantovanie“?“ (2005),
<http://daarb.narod.ru/wircq-rus.html> , <http://wave.front.ru/wircq-rus.html> , arXiv:math-ph/0503029 .]
- [5] T. D. Newton, E. P. Wigner “Localized states for elementary systems”, Rev. Mod. Phys. **21**(3), 400-406 (1949).
[Rus.: „Lokalizovannyye sostoyaniya elementarnykh sistem“, in [6], p. 277.]
- [6] E. Wigner „*Etyudy o simmetrii*“, M.: Mir (1971). [Eng.: E. P. Wigner “*Symmetries and reflections*”,
Bloomington-London: Indiana univ. press (1970).]

³All other examples that I know either come from this or are mathematically insolvent.

⁴And it turns out that for some systems introduction of good operators of coordinates is not possible at all [5].

Принцип определённости

Д. А. Арбатский*

1 февраля 2008 г.

Аннотация

Вводится понятие квантового угла. Квантовый угол оказывается метрикой на множестве физических состояний квантовой системы. Изучается его кинематика и динамика. Формулируется и доказывается принцип *определённости* для квантовых систем. Принцип определённости оказывается тесно связанным с принципом неопределённости Гейзенберга (представляет, в определённом смысле, обратную точку зрения). При этом принцип определённости позволяет дать строгие формулировки для более широкого класса задач (удастся строго истолковать и обосновать аналогичные неравенства для пар величин типа время - энергия, угол - момент импульса и т. п.)

Квантовый угол и принцип определённости

Понятие квантового угла. Как известно, множество состояний любой квантовой системы образует комплексное гильбертово пространство. Мы будем обозначать его \mathcal{H} .

Элементы пространства \mathcal{H} будем обозначать как $a, b \dots \in \mathcal{H}$.

Скалярное произведение в \mathcal{H} будем записывать как $\langle a|b \rangle$. Оно линейно по второму аргументу и антилинейно по первому.

Норму вектора a будем обозначать как $\|a\| = \langle a|a \rangle^{1/2}$.

Рассмотрим два ненулевых вектора $a, b \in \mathcal{H}$. Определим между ними *квантовый угол* формулой:

$$\angle(a, b) = \arccos \frac{|\langle a|b \rangle|}{\|a\| \|b\|}.$$

В соответствии с неравенством Коши-Буняковского-Шварца, под знаком \arccos стоит величина, не превосходящая единицы. Следовательно, квантовый угол является вещественным числом:

$$\angle(a, b) \in \mathbb{R}, \quad 0 \leq \angle(a, b) \leq \frac{\pi}{2}.$$

Для упрощения формул далее мы будем всегда работать с нормированными векторами: $\|a\| = 1$, $\|b\| = 1$. В этом случае формула для угла записывается просто как:

$$\angle(a, b) = \arccos |\langle a|b \rangle|.$$

Геометрия квантового угла. Рассмотрим два крайних случая: $\angle(a, b) = 0$ и $\angle(a, b) = \pi/2$.

В соответствии с равенством Парсеваля, первый случай имеет место, когда векторы отличаются лишь фазовым множителем:

$$\angle(a, b) = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad a \parallel b.$$

С физической точки зрения, можно сказать, что соответствующие квантовые состояния *одинаковы*.

Второй случай имеет место, когда векторы ортогональны:

$$\angle(a, b) = \frac{\pi}{2} \quad \Longleftrightarrow \quad a \perp b.$$

*<http://daarb.narod.ru/>, <http://wave.front.ru/>

В этом случае можно сказать, что соответствующие квантовые состояния *полностью различны*.

Имея в виду эту физическую терминологию, употребляемую в рассмотренных крайних случаях, введём также следующее определение. Будем говорить, что состояния, описываемые векторами a и b , *отличаются несущественно*, если $\angle(a, b) < 1$; также будем говорить, что состояния *отличаются существенно*, если $\angle(a, b) \geq 1$.

Т е о р е м а. *Для любых трёх векторов $a, b, c \in \mathcal{H}$ имеет место неравенство („неравенство треугольника“):*

$$\angle(a, c) \leq \angle(a, b) + \angle(b, c) .$$

Чтобы доказать эту теорему, заметим сначала, что, поскольку неравенство доказывается для трёх векторов, можно ограничиться случаем, когда гильбертово пространство \mathcal{H} трёхмерно: $\mathcal{H} = \mathbb{C}^3$.

Домножая векторы a , b и c на подходящие множители и выбирая ортонормированный базис в \mathcal{H} надлежащим образом, можно добиться того, чтобы компоненты этих векторов приняли вид:

$$a = (1 \ 0 \ 0) , \quad b = (b_1 \ z \ b_3) , \quad c = (c_1 \ c_2 \ 0) ,$$

где $c_1, c_2, b_1, b_3 \in [0; 1]$ — вещественные неотрицательные числа, а $z \in \mathbb{C}$ комплексно.

Введём также вспомогательный вектор b' :

$$b' = (b_1 \ |z| \ b_3) .$$

Имеем:

$$\angle(b', c) = \arccos(b_1 c_1 + |z| c_2) \leq \arccos|b_1 c_1 + z c_2| = \angle(b, c) .$$

Поскольку три вектора a , b' и c имеют вещественные координаты и единичные длины, для них неравенство треугольника — это хорошо известное неравенство треугольника на сфере в вещественном трёхмерном евклидовом пространстве:

$$\angle(a, c) \leq \angle(a, b') + \angle(b', c) .$$

Комбинируя приведённые неравенства, получаем:

$$\angle(a, c) \leq \angle(a, b') + \angle(b', c) = \angle(a, b) + \angle(b', c) \leq \angle(a, b) + \angle(b, c) \quad \blacksquare$$

Резюмируя сказанное выше, можно сказать, что квантовый угол \angle , рассматриваемый как функция на множестве пар физических квантовых состояний (рассматриваемых с точностью до фазового множителя), является *метрикой*.

Т е о р е м а. *Метрическое пространство физических квантовых состояний с метрикой \angle полно.*

Доказательство этой теоремы не сложно, но требует значительной технической работы. Поэтому мы его здесь опустим.

Кинематика квантового угла. Пусть теперь вектор r зависит от вещественного параметра $t: t \in \mathbb{R}$, $r(t) \in \mathcal{H}$, $\|r(t)\| = 1$.

Определим *квантовую скорость* $v(t)$ равенством:

$$v(t) = \dot{r}(t) = \lim_{\delta t \rightarrow 0} \frac{r(t + \delta t) - r(t)}{\delta t} .$$

Определим также *квантовую угловую скорость* $\omega(t)$ равенством:

$$\omega(t) = \lim_{\delta t \rightarrow 0} \frac{\angle(r(t + \delta t), r(t))}{|\delta t|} .$$

Чтобы выразить $\omega(t)$ через $v(t)$ разложим $v(t)$ на две ортогональные составляющие:

$$v_{\parallel}(t) = r(t) \langle r(t) | v(t) \rangle , \quad v_{\perp}(t) = v(t) - v_{\parallel}(t) .$$

Т е о р е м а. *Квантовая угловая скорость равна норме ортогональной составляющей квантовой скорости:*

$$\omega(t) = \|v_{\perp}(t)\|.$$

Чтобы доказать эту теорему, используем равенство Парсеваля для замены \arccos на \arcsin :

$$\begin{aligned} \angle(r(t+\delta t), r(t)) &= \arccos |\langle r(t+\delta t) | r(t) \rangle| = \\ &= \arcsin \|r(t+\delta t) - r(t) \langle r(t) | r(t+\delta t) \rangle\| = \\ &= \arcsin \|r(t+\delta t) - r(t) - r(t) \langle r(t) | r(t+\delta t) - r(t) \rangle\| = \\ &= \arcsin \|v(t)\delta t + o(\delta t) - r(t) \langle r(t) | v(t)\delta t + o(\delta t) \rangle\| = \\ &= \arcsin \left\| (v(t) - r(t) \langle r(t) | v(t) \rangle) \delta t + o(\delta t) \right\| = \\ &= \arcsin \|v_{\perp}(t)\delta t + o(\delta t)\| = \arcsin (\|v_{\perp}(t)\|\delta t + o(\delta t)) = \\ &= \|v_{\perp}(t)\|\delta t + o(\delta t) \quad \blacksquare \end{aligned}$$

Т е о р е м а. *Для квантового угла справедлива оценка:*

$$\angle(r(t_2), r(t_1)) \leq \left| \int_{t_1}^{t_2} \omega(t) dt \right|. \quad (1)$$

Для доказательства воспользуемся неравенством треугольника:

$$\left| \angle(r(t+\delta t), r(t_1)) - \angle(r(t), r(t_1)) \right| \leq \angle(r(t+\delta t), r(t)).$$

Поделив на $|\delta t|$ и переходя к пределу $\delta t \rightarrow 0$, получаем:

$$\left| \frac{d}{dt} \angle(r(t), r(t_1)) \right| \leq \omega(t).$$

Интегрируя от t_1 до t_2 , получаем доказываемое неравенство. \blacksquare

В действительности, оценка (1) является наилучшей. Именно, справедлива следующая

Т е о р е м а. *Квантовый угол между двумя векторами r_1 и r_2 может быть задан формулой:*

$$\angle(r_2, r_1) = \min \left| \int_{t_1}^{t_2} \omega(t) dt \right|,$$

где минимум берётся среди всех кривых $r(t)$ с концами в r_1 и r_2 : $r(t_1) = r_1$, $r(t_2) = r_2$.

Для доказательства теоремы подкрутим фазу r_2 , $r_2 \rightarrow r'_2 = e^{i\alpha} r_2$, так, чтобы $\langle r'_2 | r_1 \rangle$ было вещественно и $\langle r'_2 | r_1 \rangle \in [0, 1]$.

Далее, рассмотрим линейную оболочку r'_2 и r_1 , $\mathcal{L}(r'_2, r_1)$. В ней можно выбрать ортонормированный базис так, чтобы

$$r_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad r'_2 = \begin{pmatrix} a & b \end{pmatrix},$$

где $a, b \in [0, 1]$ — вещественные неотрицательные числа.

Рассматривая далее r'_2 и r_1 как вещественные векторы на евклидовой плоскости, замечаем, что между ними можно провести дугу, на которой оценочный интеграл как раз равняется квантовому углу. \blacksquare

Динамика квантового угла. Пусть теперь мы имеем сильно непрерывную однопараметрическую унитарную группу $U(\delta s) = e^{-i\delta s A/\hbar}$, где $A = A^*$ — самосопряжённый оператор в пространстве состояний \mathcal{H} (он называется инфинитезимальным генератором $U(\delta s)$); $\delta s \in \mathbb{R}$ — параметр группы; $\hbar \in \mathbb{R}$ — постоянная Планка.

И пусть теперь зависимость вектора состояния от параметра δs задаётся формулой:

$$r(\delta s) = |\delta s\rangle = U(\delta s)|\rangle = e^{-i\delta s A/\hbar}|\rangle.$$

Здесь $|\delta s\rangle \in \mathcal{H}$ — другое обозначение вектора состояния при параметре, равном δs ; $\rangle \in \mathcal{H}$ — фиксированный кет-вектор состояния.

Будем полагать, что функция $r(\delta s)$ дифференцируема. Тогда квантовая скорость выражается формулой:

$$v(\delta s) = \frac{1}{i\hbar} A e^{-i\delta s A/\hbar} \rangle = \frac{1}{i\hbar} A |\delta s\rangle .$$

Среднее значение оператора A не зависит от времени:

$$\overline{A} = \langle \delta s | A | \delta s \rangle = \langle e^{+i\delta s A/\hbar} A e^{-i\delta s A/\hbar} \rangle = \langle A e^{+i\delta s A/\hbar} e^{-i\delta s A/\hbar} \rangle = \langle A \rangle .$$

Поэтому составляющие квантовой скорости могут быть просто записаны как:

$$v_{\parallel}(\delta s) = |\delta s\rangle \langle \delta s | \frac{1}{i\hbar} A | \delta s \rangle = \frac{1}{i\hbar} \overline{A} |\delta s\rangle$$

$$v_{\perp}(\delta s) = \frac{1}{i\hbar} (A - \overline{A}) |\delta s\rangle .$$

Квантовая угловая скорость оказывается также независимой от времени:

$$\begin{aligned} \omega(\delta s) &= \|v_{\perp}(\delta s)\| = \frac{1}{\hbar} \langle \delta s | (A - \overline{A})^2 | \delta s \rangle^{1/2} = \frac{1}{\hbar} \langle e^{+i\delta s A/\hbar} (A - \overline{A})^2 e^{-i\delta s A/\hbar} \rangle^{1/2} = \\ &= \frac{1}{\hbar} \langle (A - \overline{A})^2 e^{+i\delta s A/\hbar} e^{-i\delta s A/\hbar} \rangle^{1/2} = \frac{1}{\hbar} \langle (A - \overline{A})^2 \rangle^{1/2} = \frac{1}{\hbar} \Delta_{\rangle} A . \end{aligned}$$

Здесь $\Delta_{\rangle} A$ является сокращённым обозначением для среднеквадратичного отклонения A в состоянии \rangle .

Рассмотрим теперь, как ведёт себя в данном случае квантовый угол $\angle(|\delta s\rangle, \rangle)$. Применяя для него оценку (1), имеем:

$$\angle(|\delta s\rangle, \rangle) \leq \left| \int_0^{\delta s} \omega(\sigma) d\sigma \right| = \frac{1}{\hbar} |\delta s| \Delta_{\rangle} A .$$

Из этого неравенства вытекает

Т е о р е м а. *Чтобы под действием сильно непрерывной однопараметрической унитарной группы $U(\delta s) = e^{-i\delta s A/\hbar}$ начальный вектор состояния \rangle изменился существенно необходимо, чтобы выполнялось неравенство:*

$$|\delta s| \Delta_{\rangle} A \geq \hbar \quad (2)$$

На примере шрёдингеровской частицы мы увидим, что эта теорема оказывается тесно связанной с принципом неопределённости Гейзенберга, но имеет иной смысл. Имея в виду эту связь, можно назвать эту теорему *принципом определённости*.

Неравенство, выражающее принцип определённости, можно записать ещё следующим образом:

$$\Delta_{\rangle}(\delta s A) \geq \hbar \quad (3)$$

В таком виде оно естественно переносится на случай, когда δs и A являются матрицами.

Примеры

Одномерная шрёдингеровская частица. Рассмотрим одномерную шрёдингеровскую частицу, координата которой задаётся переменной x . Её вектор состояния может быть записан с помощью волновой функции $\psi(x)$. В её пространстве состояний действует группа сдвигов по формуле:

$$U(\delta x) \psi(x) = \psi(x - \delta x) .$$

Эта группа может быть записана в виде:

$$U(\delta x) = e^{-i\delta x P/\hbar} , \quad P = -i\hbar \frac{d}{dx} .$$

При этом P является оператором импульса.

Применяя принцип определённости в форме (2), получаем:

$$|\delta x| \Delta_{\psi(x)} P \geq \hbar .$$

Если в качестве $\psi(x)$ взять хорошо локализованный пакет дебройлевских волн, обращающийся в нуль вне некоторого интервала l , то из этого неравенства, в частности, вытекает, что $l \geq \hbar / \Delta_{\psi(x)} P$: ведь при смещении пакета на расстояние l изменение квантового угла должно оказаться больше 1 (а именно — $\pi/2$).

Таким образом, принцип неопределённости Гейзенберга, понимаемый в качественном смысле, вытекает из принципа определённости.

Если же понимать принцип неопределённости Гейзенберга в количественном смысле, в соответствии с неравенством Паули-Вейля

$$\Delta_{\psi(x)} X \Delta_{\psi(x)} P \geq \frac{\hbar}{2} , \quad (4)$$

то непосредственной математической связи между этими принципами нет.

При этом, с физической точки зрения, принцип неопределённости Гейзенберга и принцип определённости являются как бы двумя точками зрения на размытость волнового пакета. Принцип неопределённости Гейзенберга говорит, что волновой пакет является протяжённым, поскольку *классическое* состояние частицы является *плохо определённым*. Принцип же определённости утверждает, что волновой пакет является протяжённым, поскольку *квантовое* состояние является *хорошо определённым*.

На трёхмерный случай принцип определённости без труда обобщается в форме (3):

$$\Delta_{\psi(x)} (\delta x_i P_i) \geq \hbar ,$$

где по i предполагается суммирование.

Шрёдингеровская частица на окружности. Рассмотрим теперь плоскость с декартовыми координатами x и y . Пусть на этой плоскости задана окружность $x^2 + y^2 = 1$. На этой окружности в качестве одномерной координаты можно использовать полярный угол φ , рассматриваемый с точностью до 2π .

Вектор состояния шрёдингеровской частицы на этой окружности может быть записан с помощью волновой функции $\psi(\varphi)$. При этом $\psi(\varphi + 2\pi) = \psi(\varphi)$.

В пространстве состояний при этом естественно определено действие группы вращений:

$$U(\delta\varphi) \psi(\varphi) = \psi(\varphi - \delta\varphi) .$$

Эта группа может быть записана в виде:

$$U(\delta\varphi) = e^{-i\delta\varphi J/\hbar} , \quad J = -i\hbar \frac{d}{d\varphi} .$$

При этом J является оператором момента импульса.

Применение принципа определённости не вызывает каких-либо трудностей:

$$|\delta\varphi| \Delta_{\psi(\varphi)} J \geq \hbar .$$

Что же касается применения принципа неопределённости, то перенесение неравенства (4) на этот случай невозможно¹.

В трёхмерном случае принцип определённости также легко даёт:

$$\Delta_{\psi(x,y,z)} (\delta\varphi_i J_i) \geq \hbar .$$

¹О предпринимавшихся попытках предложить неравенство, аналогичное (4), см. [1].

Система с гамильтонианом, не зависящим от времени. Пусть теперь имеется квантовая система с гамильтонианом H , не зависящим от времени. При этом на пространстве состояний оказывается определённым действие группы временных сдвигов:

$$U(\delta t) = e^{-i\delta t(-H)/\hbar}.$$

Принцип определённости в этом случае сразу даёт:

$$|\delta t| \Delta H \geq \hbar.$$

Если эту формулу применить, например, к оценке времени жизни квазистационарного распадающегося состояния, то она утверждает, что характерное время жизни у него не менее чем постоянная Планка, поделённая на ширину соответствующего уровня энергии. При этом всем терминам можно придать точный математический смысл.

Что же касается попыток сформулировать принцип неопределённости Гейзенберга для величин время - энергия, то с того времени, как Бор провозгласил такой принцип (в качественном смысле), для уточнения его смысла было проведено столько исследований и дискуссий, что по ним можно было бы написать отдельный обзор. Насколько мне известно, строгой формулировки принципа неопределённости для этого случая получить так и не удалось².

Релятивистские системы. Рассмотрим теперь произвольную релятивистскую квантовую систему. На её пространстве состояний действует группа Пуанкаре. Примером такой системы может служить любое РКК-квантованное поле³ [3, 4]. И ограничимся здесь обсуждением случая, когда поле оказывается квантованным в обычном гильбертовом пространстве.

В этом случае применение принципа определённости не сталкивается с какими-либо трудностями:

$$\Delta (-\delta x_\mu P_\mu + \frac{1}{2} \delta \omega_{\mu\nu} J_{\mu\nu}) \geq \hbar,$$

где P_μ — векторный оператор энергии-импульса, $J_{\mu\nu}$ — тензорный оператор четырёхмерного момента импульса, δx_μ и $\delta \omega_{\mu\nu}$ — стандартные логарифмические координаты группы Пуанкаре.

Что же касается применения принципа неопределённости Гейзенберга, то оно вряд ли возможно. В предыдущем пункте мы видели, что для величин время - энергия это вызывало большие трудности.

В связи с этим, уже из соображений релятивистской инвариантности ясно, что даже для координат и импульсов дело не должно обстоит просто. И это действительно так, поскольку известно, что все попытки вводить понятие координат (как самосопряжённых операторов на пространстве состояний) для релятивистских систем носят довольно искусственный характер⁴.

Список литературы

- [1] А. С. Давыдов „Квантовая механика“, изд. 2-е, М.: Наука (1973).
- [2] J. Baez “The time-energy uncertainty relation” (2000), <http://math.ucr.edu/home/baez/uncertainty.html>.
- [3] Д. А. Арбатский „О квантовании электромагнитного поля“ (2002), <http://daarb.narod.ru/qed-rus.html>, <http://wave.front.ru/qed-rus.html>, arXiv:math-ph/0402003 .
[анг.: D. A. Arbatsky “On quantization of electromagnetic field” (2002), <http://daarb.narod.ru/qed-eng.html>, <http://wave.front.ru/qed-eng.html>, arXiv:math-ph/0402003 .]
- [4] Д. А. Арбатский „Что такое „релятивистское каноническое квантование“?“ (2005), <http://daarb.narod.ru/wircq-rus.html>, <http://wave.front.ru/wircq-rus.html>, arXiv:math-ph/0503029 .
[анг.: D. A. Arbatsky “What is “relativistic canonical quantization”?” (2005), <http://daarb.narod.ru/wircq-eng.html>, <http://wave.front.ru/wircq-eng.html>, arXiv:math-ph/0503029 .]
- [5] T. D. Newton, E. P. Wigner “Localized states for elementary systems”, Rev. Mod. Phys. **21**(3), 400-406 (1949).
[рус.: „Локализованные состояния элементарных систем“, в сб. [6], стр. 277.]
- [6] Е. Вигнер „Этюды о симметрии“, М.: Мир (1971). [анг.: E. P. Wigner “Symmetries and reflections”, Bloomington-London: Indiana univ. press (1970).]

²См. также обсуждение этого вопроса Дж. Баезом [2].

³Все другие известные мне примеры либо вытекают из указанного, либо математически несостоятельны.

⁴Для некоторых же систем оказывается, что ввести хорошие операторы координат и вовсе невозможно [5].